REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o plano ABC é definido pela equação $x = 0$;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy, e $\overline{OA} = 4$;
- o ponto F pertence ao plano xOy;
- a reta FC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7), \quad k \in \mathbb{R}$.

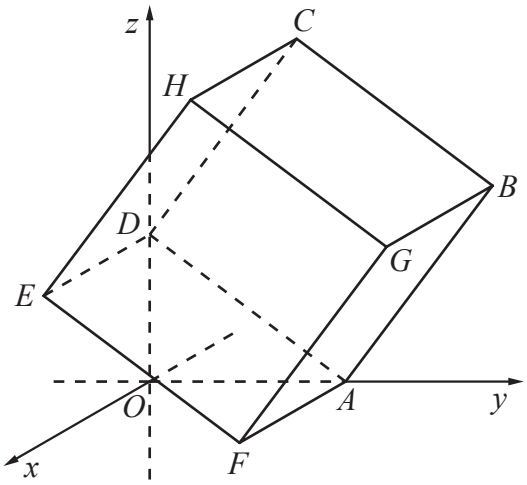

Figura 1

*** 1.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define a reta que passa no ponto A e é paralela à reta FC?

(A) $(x, y, z) = (-5, 1, 7) + k(1, -5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (5, 1, -7) + k(-1, 5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (-10, 2, 14) + k(5, 1, -7), \quad k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (10, 2, -14) + k(5, 1, -7), \quad k \in \mathbb{R}$

*** 1.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine a equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$.

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que a soma do primeiro com o quinto termo é igual a 26 e que o nono termo é igual a 31.

Averigue se 835 é termo da progressão (u_n).

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Na Figura 2, estão representados, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_{2a} x$, com $a > 1$, e o trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao eixo Ox e têm abcissas a e $a + 4$, respetivamente;
- os pontos D e C pertencem ao gráfico de f e têm abcissas a e $a + 4$, respetivamente.

Determine o valor de a para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 4.

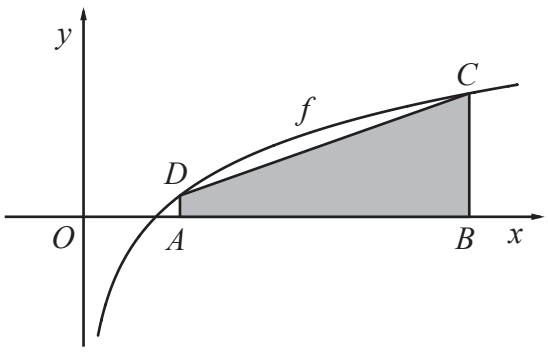

Figura 2

*** 4.** Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos à remuneração base média mensal dos trabalhadores portugueses por conta de outrem, por sexo, em seis anos pertencentes ao período de 1995 a 2020.

Anos	**Remuneração base média mensal – homens (€)** (x)	**Remuneração base média mensal – mulheres (€)** (y)
1995	542,8	416,8
2000	674,7	523,6
2005	832,5	672,0
2010	976,7	800,8
2015	990,1	825,0
2020	1109,2	960,3

Fonte: PORDATA (consultado em setembro de 2023).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana da remuneração base média mensal dos homens é ___**I**___ euros, e a amplitude interquartil é ___**II**___ euros.

De 2015 para 2020, a remuneração base média mensal das mulheres teve um aumento percentual igual a ___**III**___ .

O coeficiente de correlação linear das variáveis x e y, apresentadas na tabela, arredondado às milésimas, é ___**IV**___ .

I	**II**	**III**	**IV**
a) 832,5	**a)** 315,4	**a)** 14,1%	**a)** 0,874
b) 854,3	**b)** 440,9	**b)** 16,4%	**b)** 0,913
c) 904,6	**c)** 566,4	**c)** 17,2%	**c)** 0,998

5. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação $(x-1)^2+y^2=9$ e o triângulo $[PQR]$, inscrito na circunferência.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo QPR.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overrightarrow{QR} \bullet \overrightarrow{QP} = 27$.

Determine o valor de α.

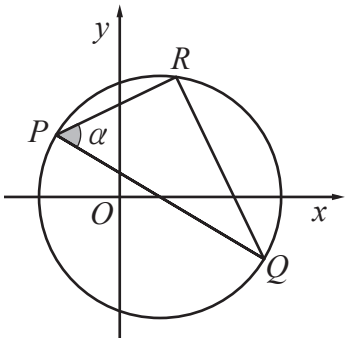

Figura 3

6. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,+\infty[$, com $f(0)=2$, e seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida, para um certo valor de k real, por

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{e^{-k}(e^x-1)}{-x^2+2x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

✱ 6.1. A reta de equação $y=3x-5$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+3x)=-5$ **(B)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+3x)=5$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-3x-5)=0$ **(D)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-3x+5)=0$

✱ 6.2. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k, sabendo que a função g é contínua em $x=0$.

7. Considere um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.

✱ 7.1. Lança-se esse dado três vezes e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada lançamento.

Qual é a probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3?

(A) $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{2}{27}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{2}{9}$

✱ 7.2. Considere todos os números naturais com seis algarismos diferentes que é possível formar usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, inscritos nas faces do dado.

Determine quantos desses números são pares, inferiores a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro. Um número nestas condições é, por exemplo, $142\,356$.

8. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$;
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 9\, P(A \cap B)$;
- $P(\overline{A}) = 3\, P(B)$.

Determine o valor de $P(A|B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

*** 9.** Uma empresa que fabrica suspensões para veículos está a testar a elasticidade nas vibrações verticais de um certo tipo de mola.

Num dos testes, fixou-se uma das extremidades de uma mola numa bancada, e a extremidade livre foi alongada alguns centímetros acima da posição de equilíbrio, tendo sido depois solta (Figura 4).

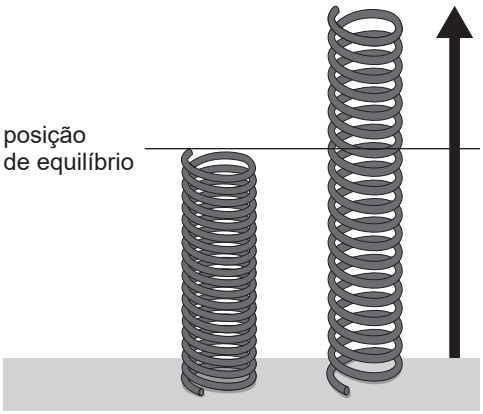

Figura 4

Admita que a mola oscila numa trajetória vertical e que o deslocamento, y, em centímetros, da extremidade livre da mola, em relação à posição de equilíbrio, no primeiro segundo, é dado, em cada instante t, em segundos, por

$$y(t) = 7{,}5\, e^{-1{,}5t}\, \text{sen}(8{,}6t + 1{,}6), \text{ com } t \in [0, 1]$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Existem três instantes em que a extremidade livre da mola está meio centímetro abaixo da posição de equilíbrio.

Determine, recorrendo à calculadora, o primeiro desses instantes.

Apresente o resultado arredondado às centésimas de segundo.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

*** 10.** Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, duas vezes diferenciável.

Relativamente à função f, sabe-se que:

- a função f', derivada da função f, é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$;
- $f'(1) = 2$.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f pode ter concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

II. No intervalo $]1, 5[$, a função f tem, pelo menos, um extremo.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

11. Seja g uma função diferenciável, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cuja derivada, g', é dada por

$$g'(x) = \cos(2x) + 2\operatorname{sen} x$$

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 11.1.** Seja r a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, e seja s a reta paralela à reta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 4.

Determine a equação reduzida da reta s.

11.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

*** 12.** Considere o ponto A, afixo no plano complexo do número $z = -2i$.

Qual dos seguintes números complexos tem como afixo o transformado do ponto A por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos?

(A) $\sqrt{3} - i$ **(B)** $-\sqrt{3} + i$ **(C)** $1 - \sqrt{3}\,i$ **(D)** $-1 + \sqrt{3}\,i$

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}$.

O número complexo w é uma das raízes sextas de um certo número complexo z.

Determine iz.

*** 14.** Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, par e diferenciável.

Seja a um número real tal que $f'(a) = f(a)$, com $f(a) \neq 0$.

Prove que $f'(-a) \times f'(a) = -[f(a)]^2$.

Sugestão: na sua resposta, poderá fazer uso da definição de derivada de uma função num ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**4.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**9.**	**10.**	**11.1.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**3.**		**5.**		**8.**		**11.2.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**